Prüfungsprotokoll
Extremale Graphentheorie

X. M. Zheng

04. August 2023

- Studiengang: M.Sc. Mathematics
- Prüfungsdauer: ca. 30 Minuten
- Prüfer: Prof. Dr. Mathias Schacht
- Beisitzer: Dr. Christian Reiher
- Vertiefung: Graphentheorie
- Belegt im: SS 2023
- Umfang: 12 ECTS
- Prüfungssprache: Deutsch
- Note: 1.0
- War diese Note angemessen? Joa.

Prüfungsstil

Die Prüfung war trotz immensen Drucks[1] fair und dafür recht gelassen. Die Person vor mir hat von Reihers Fragen erzählt und ich war dann erstmal schockiert, was man wohl alles parat haben soll. Ich wurde dann aber von Schacht beruhigt, dass man sich nicht irritieren lassen soll und wohl keiner bisher Reihers Fragen beantworten konnte.

Sonst ist es der übliche Prüfungsstil bei Schacht: Man ist in Schachts Büro und hat Stift und Papier, wird zu Vorlesungsthemen abgefragt, wo man so viel (oder so wenig) schreiben kann wie man will und notfalls Schacht einen darauf hinweist, gegebenenfalls genauer zu sein. Immer wieder gibt es Transferfragen vom Typ „Warum macht man das nicht so?“, die man dann auch beantworten können sollte, wo man aber dann auch Hilfe bekommt, wenn man mal nicht weiterweiß. In der Benotung ist es dann auch wirklich wohlwollend.

Hat sich der Besuch / Nichtbesuch der Veranstaltung für dich gelohnt?

Wenn man nicht nur mit Stichpunkten zu den Vorlesungsthemen leben will, sollte man zur Vorlesung kommen. Schacht hat (fast) keine Notizen und die, die er hat, sind für Normalsterbliche nicht von Nutzen.[2] Schacht macht aber auch zugegebenermaßen in

[1] Es sind immerhin 12 ECTS in meinem Hauptvertiefungsgebiet.

[2] Er lädt sie auch sowieso nicht hoch.

der Vorlesung einen sehr guten Job, ist ja auch schließlich sein Spezialgebiet. Drinnen zu sitzen ist meist unterhaltsam und irre, manchmal aber auch Kopfschmerzen. Dann ist es aber auch okay, wenn man das dritte Mal zu einer Sprechstunde bei ihm erscheint, insbesondere weil es durchaus sein kann, dass Schacht manchmal etwas ungenau ist.

Wie lange und wie hast du dich alleine oder mit anderen auf die Prüfung vorbereitet?

Ich habe effektiv zweieinhalb Wochen, meist isoliert im eigenen Zimmer gelernt. Psychisch war das nicht wirklich empfehlenswert, aber ich lerne nun mal gerne zu Hause, wo ich auch frei sprechen kann. Mit einem Kommilitonen die Prüfung zu simulieren hätte auch geholfen. Ich habe jede Fragestunde, die er angeboten hat, ausgenutzt und selber manchmal noch persönlich nach einer gefragt. Das kann ich nur jedem empfehlen, weil man sonst doch bei manchen Beweisen verzweifelt. Sonst gilt das meiste wie immer: Beherrsche alle Definitionen und Sätze, und – weil es Schacht ist – beherrsche auch alle wichtigen Beweise. Rechenschritte muss man dafür jetzt nicht alle durchkauen, aber man sollte wissen, was auch da abgeht. Effektiv konnte ich für die Prüfung die ganze Vorlesung auswendig, wenn man von Übungsblättern absieht. Diese konnte ich nur halbauswendig. ☺ Da im Grunde Schacht manchen Stoff auf die Übungsaufgaben verschoben hat, waren auch damit mehr als die Hälfte der Übungsblätter relevant. Trotz des großen Umfangs an Stoff muss man außerdem auch verstehen, warum *moralisch* man so im Beweis vorgeht. Man sollte wissen, warum das Vorgehen gerade so ist, warum Hypergraphenregularität so definiert wird, etc. Mit anderen Worten sollte man die *Denkweise* hinter der Vorlesung verstehen. Viele Methoden wiederholen sich und wenn man das erkennt und dann die Methoden an sich beherrscht, so macht es das Lernen deutlich einfacher. Es muss auch gesagt sein, dass die Prüfungsvorbereitung eigentlich schon damit beginnt, dass man wöchentlich seinen Aufschrieb zur Vorlesung nochmal durchgeht und großzügig ergänzt. Wenn man blind das von der Tafel abschreibt, so wird man es nach einer Weile nicht mehr dechiffrieren können.

Ablauf

Kleine Anekdoten nebenbei: 1. Schacht erklärte mir den Prüfungsablauf als sei es meine erste bei ihm gewesen, auch wenn ich Graphentheorie II erst letztes Semester bei ihm geprüft habe. Als ich ihn darauf ansprach, hieß es nur, dass es sich nicht an die Prüfungen von Graphentheorie II zurückerinnern kann. 2. Als ich reinkam, meinte Reiher zu mir, dass ich der erste bin, den er kennt. Schacht meinte daraufhin, dass er aber die Bachelorarbeit der Person zuvor geprüft habe, worauf Reiher entgegnete, dass es wohl keinen Eindruck bei ihm hinterlassen hat. Autsch.

Akt 1: Anzahl F-freier Graphen

Nachdem ich mich für gesund erklärte und Schacht mir sagte, mich nicht von Reiher irritieren zu lassen, ging es auch direkt los mit dem Satz von Erdős, Kleitman und Rothschild. Ich habe ihn dem Themengebiet erstmal dann den folgenden Satz zitiert und angeschrieben und gemeint, dass der von Erdős der Spezialfall $k = 2$ ist.

Satz (Kolaitis, Prömel, Rothschild 1986)**.** Es ist für alle $k \geqslant 2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{G\colon V(G) = [n], \chi(G) \leqslant k\}|}{|\{G\colon V(G) = [n], \omega(G) \leqslant k\}|} = 1.$$

Mit anderen Worten ist ein zufällig gezogener dreiecksfreier Graph auf n Knoten asymptotisch fast sicher bipartit. Zu den Beweis nannte ich dann erstmal die zwei Zutaten, die man für den Beweis braucht, wobei deren Beweis Schacht nicht sehen wollte:

Lemma. Es sei $b(n) := |\{G\colon V(G) = [n], \chi(G) \leqslant 2\}|$. Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$b(n+1) \geqslant 2^{\frac{n}{2}} \cdot n^{-3} \cdot b(n).$$

Satz (Andrásfai, Erdős, Sós 1974)**.** Für alle $l \geqslant 2$ gilt: Falls G $\{C_3, C_5, \dots, C_{2l-1}\}$-frei ist und $\delta(G) > 2n/(2l+1)$, dann ist $\chi(G) \leqslant 2$. In Worten: „Verbietet man viele kurze ungerade Kreise und hat hohen Minimalgrad, so hat man *gar keine* ungerade Kreise.“

Ich habe grob die Fallunterscheidung in A, B, C, D hinter dem Satz von Erdős, Kleitman, und Rothschild (mit wenig Zahlen und viel Händewedeln) erklärt. Ich habe dabei mehr Wert darauf gelegt, die grobe Struktur des Beweises (Induktion, nicht-bipartite Fälle nach oben durch $\mathcal{O}(b(n+1)/(n+1))$ beschränken. . .) zu erklären, und dann, wenn man nicht im Fall A, B, C, oder D ist, mit den Hilfsmitteln die Bipartitheit des Graphens nachzuweisen. Dies ging auch ganz gut. Schacht fragte dann, was ist, wenn man von Cliquen abweicht, also sich die Anzahl an F-freien Graphen für allgemeine F interessiert. Hierzu meinte ich, dass man im Allgemeinen nicht ganz so eine scharfe Aussage machen kann, bzw. in der Vorlesung dazu nur etwas Schwächeres behandelt wurde, nämlich:

Satz (Erdős, Frankl, Rödl 1986)**.** Sei $\textsc{Forb}(n, F) = \{G\colon V(G) = [n], G \text{ ist } F\text{-frei}\}$. Dann existiert für alle $\delta > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geqslant n_0$

$$|\textsc{Forb}(n, F)| \leqslant 2^{\mathrm{ex}(n,F)+\delta n^2}.$$

In Kurzschreibweise habe ich dann $|\textsc{Forb}(n, F)| \in \mathcal{O}(2^{\mathrm{ex}(n,F)+o(n^2)})$ hingeschrieben. Schacht wollte dann in zwei Sätzen wissen, wie man das zeigt: Man wende das Regularitätslemma an, sodass die F-Freiheit von G sich auf eine F-Freiheit des reduzierten Graphens übersetzt und zählt dann einfach. Damit war dann Schacht mit diesem Thema zufrieden.

Akt 2: Das Hypergraphen-Turán-Problem und $\pi_{\therefore}(K_4^{(3)-})$

Als nächstes wollte Schacht erstmal, dass ich alles, was ich zum Hypergraphen-Turán-Problem weiß, aufsage. Ich erzählte erstmal davon, dass ein k-uniformer Hypergraph genau dann Turán-Dichte Null hat, wenn er k-partit ist, insbesondere sonst die Dichte mindestens $k!/k^k$ sein muss. Das war für Schacht weniger von Interesse. Danach nannte ich die Schranken zu $\pi(K_4^{(3)})$, also $5/9 \leqslant \mathrm{pi}(K_4^{(3)}) \leqslant 7/10$. Er wollte dann wissen, wie man $\pi(K_4^{(3)}) \leqslant 7/10$ zeigt, was im Grunde nichts anderes als doppeltes Abzählen ist.

Dann sollte ich die untere Schranke von Frankl und Füredi zeigen:

Lemma (Frankl & Füredi 1984). $\pi\left(K_4^{(3)-}\right) \geqslant 2/7$.

Ich habe dann erstmal angemerkt, dass dieses Resultat etwas überraschend ist, da dies insbesondere zeigt, dass die Turnier-Konstruktion von Erdős und Hajnal nicht optimal ist, welche eben $1/4 = 2/8$ gibt.

Diese Konstruktion habe ich dann vorgeführt, wobei ich bis auf einen schnell korrigierten Rechenfehler alles hinbekommen habe. Von Reiher kam dann die Frage, welche auch schon bei meinem Vorgänger kam: „Wenn man im Ikosaeder die gegenüberliegenden Ecken miteinander identifiziert, und die Dreiecksflächen als Hyperkanten nimmt, welcher Hypergraph entsteht?“ Ich wusste, dass es H_0 aus der Konstruktion von Frankl und Füredi war, konnte aber nicht wirklich erklären wieso. Als ich Reiher fragte, wie überhaupt ein Ikosaeder aussieht, so meinte er nur: „Der hat halt ein C_5 im Link.“ Jagut...

Ich hatte mich dann eigentlich gefreut, noch die Turán-Dichte der Fano-Ebene zu zeigen, ein von allen Kommilitonen als schön erachteter Beweis, aber Reiher fragte nach, wann denn die Turnierkonstruktion optimal sei.

Dies lenkte uns dann zu $\pi_{\therefore}$, also der Turán-Dichte von 3-uniformen Hypergraphen, wenn man sich auf schwach dichte Hypergraphen (oder auch schwach quasi-zufällige, aber das ist ein anderes Thema) beschränkt.

Um den Beweis von Rödl, Reiher und Schacht von $\pi_{\therefore}(K_4^{(3)-}) = 1/4$ vorzuführen, zitierte ich mit viel Händewedeln erstmal das Hypergraphenregularitätslemma und was Regularität auf Hypergraphen überhaupt bedeutet:

Definition. Es sei $\varepsilon > 0$, $P = (X \,\dot\cup\, Y \,\dot\cup\, Z, E_P)$ ein tripartiter Graph[3] und $H = (V, E)$ mit

[3] Mit mindestens einem Dreieck.

$V \supseteq X \,\dot\cup\, Y \,\dot\cup\, Z$. Wir nennen H *ε-regulär auf* P, falls für alle Teilgraphen $Q \subseteq P$

$$\left| |E \cap \mathcal{K}_3(Q)| - \frac{|E \cap \mathcal{K}_3(P)|}{|\mathcal{K}_3(P)|} |\mathcal{K}_3(Q)| \right| \leqslant \varepsilon \, |\mathcal{K}_3(P)| \, .$$

Dabei ist $\mathcal{K}_3(Q) = \{xyz \colon x \in X, y \in Y, z \in Z, Q[\{x,y,z\}] \simeq K_3\}$ für $Q \subseteq P$.

Notationell schreiben wir dabei auch $d(H \mid P) \coloneqq |E \cap \mathcal{K}_3(P)| \,/\, |\mathcal{K}_3(P)|$.[4] H ist zudem (ε, d)-*regulär*, falls für alle Teilgraphen $Q \subseteq P$

$$||E \cap \mathcal{K}_3(Q)| - d\,|\mathcal{K}_3(Q)|| \leqslant \varepsilon \, |\mathcal{K}_3(P)| \, .$$

Satz (Hypergraphenregularitätslemma, Frankl und Rödl 2002)**.** Für alle $\varepsilon > 0$, $\delta \colon \mathbb{N} \to (0,1]$, $t_0 \in \mathbb{N}$ existiert $T_0 \in \mathbb{N}, n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle 3-uniforme Hypergraphen $H = (V,E)$ mit $|V| \geqslant n_0$ $t, l \in \mathbb{N}$, eine Partition $V_0 \,\dot\cup\, V_1 \,\dot\cup \ldots \dot\cup\, V_t = V$ und Familien

$$\mathcal{P}^{ij} = \left\{ P^{ij}_\alpha \colon V(P^{ij}_\alpha) = V_i \cup V_j, \alpha = 1, \ldots, l \right\}$$

für alle $1 \leqslant i < j \leqslant t$ existieren mit

$$\dot{\bigcup_{\alpha=1}^{l}} E(P^{ij}_\alpha) = \left\{ uv \colon u \in V_i, v \in V_j \right\},$$

sodass

(i) $t_0 \leqslant t \leqslant T_0$, $l \leqslant T_0$,[5]
(ii) $|V_1| = \cdots = |V_t|$, $|V_0| \leqslant \varepsilon \, |V|$,
(iii) für alle $1 \leqslant i < j \leqslant t$, $\alpha \in [l]$ ist P^{ij}_α $(\delta(l), 1/l)$-regulär,
(iv) auf allen bis auf höchstens $\varepsilon t^3 l^3$ Triads

$$P^{ijk}_{\alpha,\beta,\gamma} = P^{ij}_\alpha \cup P^{ik}_\beta \cup P^{jk}_\gamma \qquad (1 \leqslant i < j < k \leqslant t, \alpha, \beta, \gamma \in [l])$$

H ε-regulär ist.

Zum Hypergraphenregularitätslemma gab es dann die folgende Frage, wo ich – wie Reiher später meinte – fast in die Bärenfalle getappt bin: „Warum nimmt man nicht statt einer Familie von regulären, bipartiten Graphen, mit denen man die Triads bildet, nicht direkt Familien von Dreiecken?“ Ich hatte eine grobe Intuition, dass das nicht gehen sollte, aber konnte es nicht in Worten fassen. Schacht erklärte dann, was das für einen Begriff im Graphenfall geben würde: Man würde dann, falls (X,Y) ein $(\varepsilon$,d)-reguläres Paar in dem Sinne ist, für alle Teilmengen $E' \subseteq \{xy \colon x \in X, y \in Y\}$ von Paaren

$$\left| E' \cap E(X,Y) - d\,|X|\,|Y| \right| \leqslant \varepsilon \, |X|\,|Y|$$

[4] $d(H \mid P) = 0$ falls $\mathcal{K}_3(P) = \emptyset$.
[5] Man kann und es ist auch mehr oder weniger unvermeidbar, dass zudem $1/l \gg 1/t$ gilt.

erhalten. Ich konnte dann die mit etwas Zeit die Frage beantworten: Dieser Begriff ist stärker, weil für alle $X' \subseteq X, Y' \subseteq Y$ $E(X', Y')$ immer als Teilmenge in Frage kommt. Der Begriff kann außerdem nicht für $d \in (0, 1)$ Sinn machen, weil man bspw. für $d = 1/2$ dann zum Beispiel die Menge der Nicht-Kanten nehmen kann, sodass die Ungleichung für $\varepsilon < d$ nicht erfüllt wäre. So konnte ich mich dann von der Bärenfalle retten.

Ich erklärte also den Beweis, insbesondere wie man das Hypergraphenregularitätslemma, den Satz von Ramsey für 3-uniforme Hypergraphen (da habe ich auch die Ungleichung, welche die Färbung induziert, gezeigt) und das Dreieckslemma (siehe unten) ausnutzt:

Lemma. Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $r \in \mathbb{N}$, sodass für alle r-partiten $G = (X_1 \dot\cup \ldots \dot\cup X_r, E)$ mit $X_i \neq \emptyset$ für alle $i \in [r]$ und

$$\forall 1 \leqslant i < j \leqslant r\colon \sum_{x \in X_i} \left|N(x_i) \cap X_j\right|^2 \geqslant \left(\frac{1}{4} + \varepsilon\right) \left|X_j\right|^2 |X_i|$$

dann $K_3 \subseteq G$ ist.

Den Beweis des Dreieckslemma musste ich dann glaube ich nicht in voller Fülle zeigen, da ich ihn zwei Tage zuvor dazu intensiv gefragt habe. Es kam aber die Frage, wie sich in der Größenordnung das t von dem Regularitätslemma und das m zur Anwendung vom Satz von Ramsey für 3-uniforme Hypergraphen verhalten. Ich meinte, dass $t \gg m$ gelten sollte, was auch stimmt, aber Schacht wollte wissen, welcher Parameter das bezeugt. Da stand ich dann auf dem Schlauch, was mir Schacht aber nicht zu arg übel nahm: $1/\varepsilon \ll t$ wegen der Anwendung des Regularitätslemmas, aber $m \ll 1/\varepsilon$ wegen der anfänglichen Anwedung von Turán, um die 3-uniforme Clique auf m Knoten zu erhalten.

Ganz am Ende kam zu diesem Thema noch eine Frage von Reiher: „Wenn man die Knoten des Hypergraphen ordnet, welche Reihenfolge der Ordnung liefert der Beweis dann für die Knoten des gefundenen $K_4^{(3)-}$s?“ Wenn man annimmt, dass man dafür sorgen kann, dass das Regularitätslemma die Ordnung erhält, so ist es tatsächlich so, dass der ausgezeichnete Knoten entweder von den vier der letzte oder der erste ist. Dies wird insbesondere in der Anwendung vom Satz von Ramsey für 3-uniforme Graphen ersichtlich. Das konnte ich aber in der Prüfung auch nur so halb antworten.

Akt 3: Forcing-Vermutung

Zuletzt fragte Schacht mich noch etwas zur Forcing-Vermutung, also was diese aussagt, was überhaupt ein *forcing pair* ist, und wie man für K_3 ein F konstruieren kann, sodass (K_3, F) forcing ist.

Vermutung. (K_2, H) ist *forcing*, wenn H bipartit und kein Wald ist.

Definition (Forcing)**.** Ein Graphenpaar (F_1, F_2) ist *forcing*, falls für alle $\varepsilon > 0$ $\delta > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren, sodass für alle Graphen G auf $n \geqslant n_0$ Knoten mit

$$\left|\left\{F' \subseteq G \colon F' \simeq F_1\right\}\right| \geqslant d^{e_{F_1}} n^{v_{F_1}} - \delta n^{v_{F_1}} \wedge \left|\left\{F' \subseteq G \colon F' \simeq F_2\right\}\right| \leqslant d^{e_{F_2}} n^{v_{F_2}} - \delta n^{v_{F_2}}$$

dann $G \in \textsc{Disc}_d(\varepsilon)$ folgt.[6]

Zu letzterem: Man brauchte drei sogenannte Verdopplungsschritte, welche ich dann auch anzeichnete. Dabei habe mich etwas schwer getan, aber Schacht half dabei wenn nötig auch. Er fragte dann, ob das notwendig sei, und ich meinte nein, zwei würden wegen ihm und Reiher auch reichen. Anders als bei $\pi_{\because}(K_4^{(3)-})$ meinte darauf Schacht, dass sie es zudem als erste hier bewiesen haben.

Fazit

Bis auf die eine Bärenfalle, wo ich fast abgerutscht wäre, waren sie sonst beide zufrieden gewesen. Es gab darauf die 1.0, wozu ich nur „Noice.“ von mir geben konnte. Es musste dann noch schnell ein Termin mit Schacht für das Einarbeitungsprojekt vereinbart werden, und dann bin ich auch schon mit viel Erleichterung gegangen.

[6]Hier ist das Zählen im *gelabelten* Sinne zu verstehen.