Prüfungsprotokoll – Graphentheorie II

X. M. Zheng

14. Februar 2023

- Studiengang: M.Sc. Mathematics
- Prüfungsdauer: ca. 37 Minuten (kann aber variieren von 30 bis 50 Minuten)
- Prüfer: Prof. Mathias Schacht
- Beisitzer: Dr. Attila Joó
- Vertiefung: Graphentheorie
- Belegt im: WS 2022 - 2023
- Umfang: 12 ECTS
- Prüfungssprache: Deutsch (Englisch wäre auch möglich.)
- Note: 1.0
- War diese Note angemessen? Zum Großteil schon, nur hätte ich mir wegen gewisser Patzer selber wahrscheinlich keine 1.0 gegeben.

Prüfungsstil

Schacht ist insgesamt ein sehr fairer Prüfer gewesen. Sowohl zugunsten des Prüflings als auch Schacht selbst hat man mehrere Blätter und verschiedenfarbige Stifte zur Verfügung. Falls man ihm zu wenig schreibt, sagt er einem dann auch Bescheid, sodass man – laut ihm – nie zu wenig schreiben kann.

Bezüglich der Themen ist Schacht ging es schon ins Detail, wobei es aber trotzdem meist nie zu pedantisch wurde. Er ließ einen gut ausreden, sodass man gut sein Wissen präsentieren konnte. Dabei wurden eventuell Voraussetzungen des Beweises hinterfragt, sodass wirklich das Verständnis geprüft wurde. Bei Unklarheiten nimmt es Schacht auch nicht übel, wenn man fragt, ob er seine Frage wiederholen kann. Teilweise ging es aber auch Richtung Fragen, die beispielsweise die Vertrautheit mit Graphentheorie I prüften oder über die Vorlesung hinausging, wo ich dann etwas überfragt war.

Nichtsdestotrotz ist die Prüfung bei Schacht insgesamt sehr angenehm gewesen.

Hat sich der Besuch / Nichtbesuch der Veranstaltung für dich gelohnt?

Auf jeden Fall. Schacht ist ein sehr guter Dozent und weiß, wie man die Themen motiviert. Dabei helfen seine Anekdoten zu den einzelnen Personen, die Einordnung im historischen Kontext und sein trockener Humor. Weiter kennt er sich auf jeden Fall sehr gut mit den Themen auch aus, wobei er nur in ein paar Fällen (insbesondere bei Tree Decompositions) auf Notizen zurückgreifen musste. Was auch Schacht besonders macht, ist die Klarheit, mit welcher er die Beweise erklärt. Es werden viele Bilder gemalt zum Illustrieren der Beweise und auf zu formale Definitionen, die eher das Verständnis benebeln würden als zu helfen, wird verzichtet. Dann heißt es oft auch einfach „Sie wissen, was ich meine.“. Das kann schlecht sein für Leute ohne graphentheoretischen Hintergrund, aber deswegen wird wohl Graphentheorie I als Voraussetzung angegeben.

Wie lange und wie hast du dich alleine oder mit anderen auf die Prüfung vorbereitet?

Ich habe für circa 12 Tage gelernt, einen Tag davon mit einem Kommilitonen, der ebenfalls die Prüfung ablegen wollte. Dabei habe ich mich hauptsächlich an Vorlesungsnotizen, Schachts gesendeten Extramaterialien und selbstgemachten Fotos von den Tafeln orientiert. Falls das nicht geholfen hat, habe ich auf Diestels Buch zurückgegriffen, welches einen Großteil des Stoffes abdeckt. Ich würde auf jeden Fall sagen, dass mindestens so 10 Tage notwendig sind, um den Stoff komplett verinnerlicht zu haben. Das Üben mit einem Kommilitonen, wo man dann auch wirklich versuchen muss, den Stoff jemand anerem zu erklären ist auch sehr empfehlenswert. Die Übungsblätter können das Verständnis nochmal vertiefen, aber sollten für die Prüfungsvorbereitung weniger die Priorität sein.

Akt 1: Der Satz von Galvin

Als erstes Thema wurde ich zum Satz von Galvin (Theorem 5.4.4) gefragt, welcher besagt, dass für alle bipartiten Graphen G $\chi'(G) = \mathrm{ch}'(G)$ gilt. Dabei habe ich es zuvor noch im Kontext der *List Colouring Conjecture* kurz eingeordnet. Zuerst habe ich dann Lemma 5.4.3 aufgesagt, und erklärt, was ein Kernel ist. Der Beweis wurde dann skizziert.

Schacht meinte danach, dass es komisch ist, dass wir uns für dieses Lemma interessieren, welches erstmal unter erstmal beliebig erscheinenden Voraussetzungen dann was über die Listenfärbbarkeit des Graphens sagt statt der des Line Graphs. Dem entgegen habe ich dann den Beweis von Satz von Galvin wiedergegeben. Dabei durfte ich das Stable Marriage Theorem als gegeben voraussetzen („Passt, ich glaube ihnen, dass sie das Stable Marriage Theorem können.“), und habe dann stattdessen erstmal die Orientierung explizit angeben und skizziert. Bei dem Nachweis, dass unter dieser Orientierung

$d^+(v) \leqslant \chi'(G)-1$ gilt, hat Schacht nachgefragt, ob Gleichheit da möglich ist. Nach etwas Überlegen antwortete ich ja, da nach *König's Line Coloring Theorem* gerade $\chi'(G) = \Delta(G)$ gilt. Schacht war damit dann zufrieden, insbesondere weil er mich nicht mit *Vizing's Theorem*, was erstmal nur $\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$ gibt, verunsichern konnte.

Am Ende habe ich auch dann die zweite Bedingung von Lemma 5.4.3 für die Orientierung nachweisen können, womit dann das Thema *Colouring* beendet wurde.

Akt 2: Die Burr–Erdős Vermutung

Daraufhin ging es in die Ramseytheorie. Schacht wollte von mir den Beweis des ersten Teils der Burr–Erdős Vermutung, welcher besagt:

Für alle $\Delta \in \mathbb{N}$ existiert eine universelle Konstante $L > 0$, sodass für alle Graphen H mit $\Delta(H) \leqslant \Delta$ wir $R(H) \leqslant L \cdot |H|$ haben.

Dabei habe ich aus Versehen anfangs noch $R(n, H)$ geschrieben, aber schnell auf Nachfrage Schachts korrigiert. Ich habe danach dann den Beweis skizziert, wobei die groben Schritte wie folgt sind: Wähle Parameter passend. Dann gilt für G mit $|G| \geqslant L \cdot |H|$:

1. G ist regularisierbar mit Partition $V_0 \cupdot V_1 \cupdot \ldots \cupdot V_t$.
2. Der reduzierte Graph hat höchstens $\varepsilon t^2 < 1/(s-1) \cdot t^2/2$ Kanten entsprechend der irregulären Paare, sodass also der reduzierte Graph nach dem Satz von Turán einen K_s besitzt, dessen Knoten s Partitionsklassen entsprechen, die paarweise reguläre Paare sind.
3. Da wenn (X, Y) in einem Graph ein (ε, d)-reguläres Paar ist, dann (X, Y) im Komplement ein $(\varepsilon, 1-d)$-reguläres Paar ist, können wir die Kanten des K_s 2-färben, je nach dem, ob die Dichte $\geqslant 1/2$ oder $< 1/2$ ist.
4. Da wir $s = R(K_{\Delta+1})$ wählen, existieren s Partitionsklassen, sodass die paarweise ε-reguläre Paare mit Dichte mindestens $1/2$ oder im Komplement größer $1/2$ sind.
5. Das Embedding Lemma liefert dann (wegen unserer Wahl der Parameter), das $H \subseteq G$.

Schacht war erstmal verwundert, warum ich gerade G betrachte, wobei ich erkläre, dass man ja statt eine Kantenfärbung mit 2 Farben von $K_{L\cdot|H|}$ auch bei Ramsey es sich als einen Graphen G als die eine Farbklasse und $\overline{G}$ als die andere Farbklasse vorstellen kann.

Schacht ist glücklicherweise okay damit gewesen, wenn man nur den Beweis skizziert, und nicht alle Lücken bezüglich wie die Parameter gewählt sein müssen, füllen muss. Er wollte aber jedoch wissen, was das Embedding Lemma besagt, was ich gut wiedergeben konnte, und wie grob der Beweis vorgeht. Wichtig wurde dann dabei zu wissen, um wie viel die Kandidatenmengen höchstens schrumpfen dürfen, wobei ich um einen Faktor $d_0/2$ sagte, aber er dann meinte, dass es Modulo technische Details wir mal um einen Faktor d_0 sagen. Daraufhin fragte dann Schacht in Anbetracht des zweiten Teils der Burr–Erdős Vermutung, wo wir genau den beschränkten Maximalgrad brauchen in dem Beweis des Embeddinglemmas statt einfach beschränkter Degeneracy. Schließlich würden ja die Kandidatenmengen nur für jeden „linken“ (bzw. rechten, je nach Anordnung) Nachbarn um d_0 schrumpfen, sodass die Schranke mit dem Maximalgrad erstmal etwas übertrieben scheint. Ich musste mit der Frage etwas kämpfen, bis ich schließlich dann antwortete, dass die nötig ist, um bei der letztlichen Wahl des Kandidaten einschränken zu können, wie viele in der Kandidatenmenge schlecht sind in dem Sinne, das deren Wahl die weiter rechten Kandidatenmengen zu sehr schrumpfen lässt. Hier spielt also die „rechte“ Nachbarschaft mitein, sodass die Beschränkung notwendig wird. Damit war dann auch Schacht zufrieden und es wurde dann abschließend gefragt, warum wir gerade $K_{\Delta+1}$, wobei ich dem entgegegnete, dass das eine obere Schranke von $\chi(H)$ ist, wie viele unabhängige Mengen man also mindestens braucht, um die Knotenmenge von H zu partitionieren.

Schließlich hatte Schacht noch gefragt, wie man denn von 2 Farben auf allgemein r Farben den Beweis generalisieren könnte. Hier stand ich dann sehr auf dem Schlauch, da der Beweis erstmal stark darauf aufbaut, dass wenn (X, Y) in einem Graph ein (ε, d)-reguläres Paar ist, dann (X, Y) im Komplement ein $(\varepsilon, 1 - d)$-reguläres Paar ist.

Ich habe zwei mögliche Ansätze genannt, einmal das man dann eben statt 2 Färbung in Schritt 3 eine r Färbung macht, die dann eine Dichte von $\geqslant 1/r$ garantiert. Das klappt aber nicht, weil du so Regularität erstmal nicht erhalten kannst. Als zweiten Ansatz nannte ich ein *Colorblindness*-Argument. Hier war ich dann sehr auf dem Schlauch, aber es wurde klar, dass das auch nicht klappen konnte. Schließlich löste Schacht auf, dass eine Möglichkeit ist, das Regularitätslemma eben auf r Farben zu generalisieren. Man hätte also – entsprechend der Kantenfärbung – eine Kantenzerlegung von G in r Teilgraphen $G_1, \ldots, G_r$ und verfeinert die Partition P im Beweis so, dass man das Indexerhöhungs-Argument im Beweis des Regularitätslemmas mit $\sum_{i=1}^{r} \mathrm{ind}_{G_i}(P)$ statt dem Index von nur einem Graphen macht.

Akt 3: Seymour's 6-Flow Theorem

Zuletzt ging es um H-Flows. Ich habe dann kurz erklärt, was H-Flows sind, also dass H eine abelsche Gruppe ist, etc. Dabei habe ich erstmal vergessen, dass ohne die Nowhere-Zero-Bedingung diese Objekte Circulation heißen, aber konnte mich, ohne auf Circulations zurückzugreifen, durch die Definition durchhangeln. Dann hat Schacht gefragt, wann es keinen solchen Flow gibt, worauf ich dann nannte, dass Graphen mit Brücken immer keinen H-Flow besitzen, da die Brücke Flusswert 0 haben muss.

Schließlich musste ich dann das *6-Flow Theorem* / Satz 6.6.1 beweisen. Das lief gut, aber ich kam kurz aus der Fassung als Schacht meint, dass man bei der Wahl der X_i die Bedingung, dass $G[X_i]$ zusammenhängend ist[1], weglassen kann. Ich war kurz verdutzt, weil ich fälschlicherweise dachte, das in meinen Notizen Zusammenhang explizit gefordert wird. Schacht meinte daraufhin zur Erleichterung „Das ist keine Trickfrage, ist halt so. Wie sie es machen ist es auch okay.“. Irgendwie kam auch, weil ich Schacht korrigieren wollte, die Frage auf, ob $\mathbb{Z}_6$ und $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ dieselbe Gruppe sind, aber glücklicherweise sind wir nicht darauf näher eingegangen.[2] Ich musste dann noch kurz erklären, wie man den $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$-Flow circa konstruiert und warum man wirklich einen $\mathbb{Z}_3$-Flow in der ersten Komponente benötigt. Das hat damit zu tun, dass beim Konstruieren dieses $\mathbb{Z}_3$-Flows, der höchstens auf den den Kanten der H_i's Null ist, man bei der *Reverse Induction* über die F_i den Fall hat, dass $|F_i| = 2$ ist und genau eine davon Null bisher als Flusswert hat. Hätte man statt $\mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}_2$, sodass F_i die Werte 0 und 1 hat, so bleibt einer der Werte Null, wenn man – wie im Beweis – dann auf einem orientierten Kreis, der F_i enthält, Flusswert 1 addiert. Ich wurde dann kurz gefragt, wie man diesen Kreis kriegt, woraufhin ich auf den Zusammenhang von H_i bzw. H^{i-1} hinweise.

Fazit

Da Attila auch keine Fragen hatte, war dann die Prüfung beendet. Es hieß dann, ohne extra Absprache zwischen Schacht und Attila, dass man mir die Note 1.0 gibt, da er nichts wirklich aussetzen kann.

[1]Diese Bedingung ist tatsächlich nichtig wegen der Minimalität.
[2]Tatsächlich sind es die gleichen Gruppen.