Prüfungsprotokoll
Model Theory

X. M. Zheng

17. März 2023

- Studiengang: M.Sc. Mathematics
- Prüfungsdauer: 33 Minuten
- Prüfer: PD Dr. Stefan Geschke
- Beisitzer: Gab es nicht.
- Vertiefung: Logik & Mengenlehre
- Belegt im: WS 2022 - 2023
- Umfang: 8 ECTS
- Prüfungssprache: Deutsch
- Note: 1.0
- War diese Note angemessen? Ja.

Prüfungsstil

Die Prüfung war sehr angenehm, auch wenn sie über Zoom war. Zum Anschreiben von Sachen nutzte ich mein Grafiktablet und das Whiteboard in Zoom, Stift und Papier wären auch möglich gewesen. Geschke plant im Schnitt, dass die Prüfung so 20 Minuten dauert. Man darf sich anfangs ein Thema wählen, worüber man dann so 10 bis 15 Minuten reden darf, und er eventuell reingrätscht. Danach gibt es dann ein paar allgemeinere Fragen. Dabei scheint Geschke wirklich eher zu interessieren, dass man die groben Zusammenhänge und Konsequenzen der Sätze versteht, als jetzt jedes einzelne Lemmata zeigen zu können. Auch wenn man für ein paar der Details in Beweisen eigentlich ein halbwegs tiefes Verständnis von Mengentheorie braucht, setzt das Geschke in der Prüfung nicht voraus.

Hat sich der Besuch / Nichtbesuch der Veranstaltung für dich gelohnt?

Der Besuch der Vorlesung hat sich insgesamt schon gelohnt. Geschke hält sich sehr am Skript, aber gibt in der Vorlesung auch mehr Kontext, warum dies und jenes tatsächlich interessant ist. Außerdem erkennt man in der Vorlesung auch, was so wirklich wichtig ist. Gerne wurden dann Dinge übersprungen, die mehr oder weniger in dem Skript nur vollständigkeitshalber drin sind.

Die Übung hat sich fast sogar mehr gelohnt. Zum einen gibt es keine Musterlösungen, wir seien ja alle mittlerweile alt genug, zum anderen macht es die Themen der Vorlesung greifbarer. Geschke gibt dann auch mehr Kontext als in der Vorlesung zu den einzelnen Themen, sodass es durchaus unterhaltsam ist.

Wie lange und wie hast du dich alleine oder mit anderen auf die Prüfung vorbereitet?

Ich habe effektiv alleine 9 - 10 Tage lang intensiv gelernt. Dabei bin ich im Grunde einfach mehrfach durch das Skript durchgegangen. Die Übungsblätter waren für mich eher weniger von Interesse, insbesondere weil die Aufgaben entweder sehr mengentheoretisch - was dann also definitiv nicht in der Prüfung drankommt -, viel zu schwer für eine so kurze Prüfung, oder so einfach, dass man es sich kurz herleiten kann, sind.

Wie immer waren die allgemeinen Zusammenhänge und Konsequenzen wichtiger, als jedes einzelne Details eines in dem Skript durchexzertierten Beispiels draufzuhaben.

Da viele Aussagen ähnlich in der Vorlesung klingen, insbesondere im Kapitel zu Quantoren-Elimination, habe ich dann auch noch eine Zusammenfassung für mich selber verfasst zum Gedächtnis, aber auch um alles auf dem Blick zu haben. Dass ich insbesondere eine Tabelle für die Eigenschaften von bestimmten Theorien erstellt habe, also ob sie vollständig sind, $\aleph_0$-kategorisch, oder gar κ-kategorisch für eine überabzählbare Kardinalzahl κ, würde sich später als nützlich herausstellen:

Theory of ...	Complete?	$\aleph_0$-categorical?	κ-categorical for uncountable κ?
Infinite sets	✓	✓	✓
$\mathbb{Q}$-vector spaces	✓		✓
Linear dense orders without endpoints	✓	✓	Nope, $(\mathbb{R}, \leqslant)$ and $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \leqslant)$.
$A = \mathbb{N} \times \{0\} \cup \mathbb{N} \times \{1\}$, $(a, b) \leqslant (x, y)$ if $b = y = 0$ and $a \leqslant x$	✓		
Random graphs	✓	✓	
$\textsc{AlgebraicallyClosedFields}_p$	✓		✓

Akt 0: Geschke beantwortet meine Frage

Ich hatte Geschke in einer Mail eigentlich eine Frage zum Skript gestellt und zwar warum wir im Beweis des Kompaktheitssatzes o.B.d.A. davon ausgehen, dass Φ eine Theorie ist, auch wenn der Satz in der Formulierung des Skripts alle möglichen Formeln (eines fixen Vokabulars) erlaubt. Diese Frage blieb unbeantwortet **bis vor der Prüfung**.[1]

Schließlich antwortete mir Geschke, dass mein „Fix“ funktioniert:
- Weise jeder Variablen eindeutig ein Konstantensymbol zu.
- Erweitere das Vokabular um diese Symbole.

[1]Es sei gesagt, dass er das wirklich einfach vergessen hat und ich dankbar bin, dass er mich die Prüfung vorschieben ließ.

- „Konvertiere“ die Menge Φ in eine Theorie Φ', indem du jedes Vorkommen einer freien Variablen in einer Formel durch die entsprechend zugewiesene Konstante ersetzt.
- Wende darauf den Kompaktheitssatz im Theorie-Fall an.
- Nehme von dem Modell dann den *reduct*, und nehme die Belegung induziert durch die Interpretation der Konstantensymbole.

Eine weitere Möglichkeit wäre es, indem man sich auch beim Beweis kanonisch, neben der τ-Struktur, eben die Belegung baut.

Diese ganze Situation war mir etwas unangenehm, denn mein Vortragsthema war. . .

Akt 1: Der Kompaktheitssatz

Ich habe eine kurze Einleitung gegeben mit der Botschaft, dass wir deswegen gerade erststufige Logik machen, weil man neben dem Vollständigkeitssatz, dem Endlichkeitssatz, auch den Kompaktheitssatz hat.

Zuerst wollte Geschke dann von mir geklärt haben, wo ich den Unterschied zwischen den letzten beiden sehe, um sich zu vergewissern, dass wir dasselbe meinten.

Ich ging dann eigentlich chronologisch durch die Sachen in dem Unterkapitel durch, die dann zum Beweis führten. Dabei wollte Geschke auch von mir keine Beweise zu den Lemmatas, und beim Satz von Łoś reichte das Stichwort „Induktion“. Ich habe ein paar Kommentare gegeben, die nicht im Skript waren, wie beispielsweise unser Beweis vom Kompaktheitssatz faszinierend ist, weil man nichts an Beweistheorie braucht, und wie die Definition eines Filters doch eine Formalisierung von „Die meisten sind in . . . “ ist, also – wie Geschke dann meinte – einen Begriff von „Größe“ gibt. Ob er das positiv bewertete oder nicht, weiß ich nicht wirklich.

Der Beweis vom Kompaktheitssatz wurde dann auch etwas abgekürzt, und da waren auch schon 20 Minuten um.

Akt 2: Fragen

Geschke war das Ganze etwas umfangreich, aber er nahm es mir nicht übel, er hätte jederzeit unterbrechen können. Jedoch musste er noch ein paar Fragen stellen:

Die erste drehte sich um die Theorie der natürlichen Zahlen[2], genauer sollte ich zuerst ein Nicht-Standardmodell der natürlichen Zahlen angeben. Das war auch mit dem

[2] Also wirklich $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$, wobei $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, S, 0, +, \cdot)$ und nicht nur der deduktive Abscluss der erststufigen Peano-Axiome ist.

Upward Löwenheim-Skolem Theorem, dessen Beweis ich skizzierte und bei Fragen ergänzte, getan. Als nächstes sollte ich zeigen, dass es sogar abzählbare Nicht-Standardmodelle gibt. Ich habe dann erstmal eine Ultrapotenz $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{N}/\mathcal{U}$ von $\mathbb{N}$, wobei $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter ist, angegeben. Das ist aber – wie Geschke anmerkte – nicht abzählbar. Bevor ich einen ganz anderen Ansatz verfolgen wollte, erinnerte ich mich, dass man ja auch einfach das *Downward Löwenheim-Skolem Theorem* nutzen kann, man also die „normalen natürlichen Zahlen" plus einer „Nicht-Standardzahl" zu einer abzählbaren elementaren Unterstruktur dieser Ultrapotenz erweitern kann. Diese ist also insbesondere elementar äquivalent zu $\mathcal{N}$. Kurz sollte ich dann noch begründen, warum das tatsächlich ein Nicht-Standardmodell ist, also wie man – ohne auf die Ultrapotenz-Konstruktion zu verweisen – die „normalen" natürlichen Zahlen im Modell charakterisieren kann. Nach etwas Rumraten kam ich schließlich darauf: Es sind genau die Zahlen, die man durch $\mathbb{N} \ni n$-maliges Anwenden der Nachfolgerfunktion S auf die Null erhält.

Zuletzt sollte ich noch eine Theorie angeben, die vollständig, $\aleph_0$-kategorisch, aber nicht κ-kategorisch für überabzählbare Kardinalzahlen κ ist. Weil ich genau das mir mit der Zusammenfassung herausgeschrieben habe, nannte ich direkt die *linear dense orders without endpoints*. Damit war er auch zufrieden und mit etwas Verlängerung die Prüfung beendet.

Fazit

Auch wenn Geschke meinen Vortrag eigentlich viel zu umfangreich fand, wollte er mir nichts da abziehen. Ohne viel Nachdenken hieß es dann, dass ich eine 1.0 habe, da ich alles parat hatte und auch beim Aufschreiben der Sachen auf dem Whiteboard nie einen Fehler gemacht habe. Die abschließenden Fragen hätte ich auch souverän beantworten können.

Bevor man dann das Meeting beendete, hat man noch kurz etwas gesmalltalked, wie das Skript eigentlich für vier Stunden die Woche ausgelegt war und wir deswegen nicht weit kamen, wie überraschend groß die Rolle des Ultraprodukts in der Modelltheorie ist, und wie komisch doch Sätze wie der Satz von Morley oder beispielsweise Shelahs *Main Gap Theorem*, der leider nicht in der Vorlesung behandelt wurde, sind.